بررسی تأثیر انحنای گوشهٔ گشودگی بر تمرکز تنش ناشی از شار حرارتی *

محمد جعفری [۱]   محمدباقر نظری [۲]

چکیده بر پایهٔ تئوری ترموالاستیسیته دوبعدی حالت پایدار میدان تنش در اطراف گشودگی‌های مختلف در یک صفحهٔ نامحدود همسان‌گرد مورد بررسی قرار می‌گیرد. صفحه در بی‌نهایت تحت جریان حرارتی یکنواخت است و مرز گشودگی مرکزی عایق است. بااستفاده از توابع پتانسیل مختلط و به‌کارگیری نگاشت همنوا و حلّ معادلات انتگرالی، تأثیر انحنای گوشهٔ گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی مطالعه می‌شود. روش حل بر پایهٔ بسط روش گودیر و فلورنس است. آنها از روش متغیّر مختلط برای تحلیل تنش ورق نامحدود همسان گوشهٔ گرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل استفاده کردند. برای سادگی استفاده از انتگرال کوشی ورق نامحدود شامل گشودگی غیردایروی به ناحیهٔ درون دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته می‌شود. نتایج حاصل نشان می‌دهند که انحنای گوشهٔ گشودگی تأثیر بسزایی بر توزیع تنش دارد.

واژه‌های کلیدی نرمی گشودگی; تنش حرارتی; نگاشت همنوا; حلّ تحلیلی; شار حرارتی.

A Study of the Effect of Curvature of the Corner of Hole on Stress Concentration Caused by Uniform Heat Flux

M. Jafari   M.B. Nazari

Abstract *On the basis of the steady-state two-dimensional theory of thermoelasticity, stress field around various holes in infinite isotropic plate is discussed. The plate is subjected to uniform heat flux and thermal insulated condition along the hole boundary is assumed. by using the complex potential functions and by applying the conformal mapping and solving the integral equations, the effect of bluntness on stress distribution around the hole is studied. The used method is the expansion of the Goodier and Florence's method. They used complex variable method for stress analysis of infinite isotropic plates with elliptical and circular holes. For simplicity of using the Cauchy integral formula, the infinite area external to the non-circular hole can be represented by the area outside the unit circle. The results obtained demonstrate the effect of bluntness on stress distribution around the holes.*

Key Words Bluntness; Complex Variable Method; Conformal Mapping; Analytical Solution; Uniform Heat Flux.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۱۱/۳ و تاریخ پذیرش آن ۹٤/۷/۲۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v28i1.43711

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود. m_jafari821@shahroodut.ac.ir

(۲) استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

مقدمه

ورق‌ها به‌دلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. ورق‌ها کاربرد عملی مهمّی در ساخت توربین‌های جدید بخار و گاز، موتورهای موشک و جت و راکتورهای هسته‌ای دارند. اجزای این قبیل سازه‌ها عمدتاً تحت بارگذاری حرارتی قرار می‌گیرند. این نوع بارگذاری باعث گرادیان دمایی و انبساط حرارتی غیریکنواخت بین اجزای مختلف می‌شود. درصورتی‌که انبساط حرارتی غیریکنواخت آزادانه نتواند پیشرفت کند؛ در یک جسم الاستیک باعث تنش‌های حرارتی می‌شود. به‌عبارت دیگر یک ورق نامحدود تحت جریان حرارتی پایدار با یک گرادیان حرارتی ثابت درصورتی‌که تحت هیچ قید مکانیکی در لبه‌های خارجی قرار نگیرد و هیچ گشودگی نداشته باشد؛ تحت هیچ تنش حرارتی قرار نمی‌گیرد. تنش حرارتی وقتی ایجاد می‌شود که جریان حرارتی یکنواخت در حضور یک گشودگی عایق مغشوش شود. وجود عیوب و ناپیوستگی‌هایی مانند گشودگی در ورق‌هایی که تحت جریان حرارتی یکنواخت قرار می‌گیرند باعث تجمع تنش در اطراف آنها می‌شود و در عمر مفید و ضریب اطمینان سازه تأثیرگذار است. تعیین مقدار و محل این تنش‌ها برای دست‌یابی به طراحی منطقی و واقع‌بینانهٔ این اجزا ضروری است. لذا تحقیق در مورد تمرکز تنش ایجادشده در اطراف گشودگی‌های مختلف در مواد الاستیک که تحت جریان حرارتی یکنواخت قرار می‌گیرند در طراحی پیشرفتهٔ سازه‌های مهندسی بسیار مهم است.

تحقیقات متعددی در مورد مسئلهٔ ترموالاستیک ورق‌های همسان‌گرد حاوی گشودگی یا نقص هندسی از روش متغیّر مختلط انجام شده است. بخشی از این تحقیقات شامل بررسی تأثیر وجود گشودگی یا میان‌بار (inclusion) در تحلیل تنش ورق‌های نامحدود و تحت بارگذاری حرارتی است و بخش دیگر تحقیقات، به بررسی حضور ترک می‌پردازد. گودیر و فلورنس [1] و موشخلیشویلی [2] پایه‌گذار تئوری‌های مربوط به حلّ مسائل ترموالاستیک دوبعدی با استفاده از روش متغیّر مختلط هستند. فلورنس و گودیر [1,3] تنش‌های حرارتی برای یک ورق الاستیک همسان‌گرد شامل گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل را با استفاده از روش متغیّر مختلط حل کردند. رائو [4] از روش تحلیلی ارائه‌شده توسط لی [5] مسئلهٔ سه‌بعدی تعیین تنش‌های حرارتی را در اطراف گشودگی بیضی‌شکل عایق در یک ورق ضخیم و تحت جریان حرارتی یکنواخت در دستگاه مختصات بیضوی حل کرد. تاکیوتی و سومی [6] با به‌کارگیری روش متغیّر مختلط و استفاده از توابع تنش مختلط توانستند توزیع تنش حرارتی را در ورقی با ابعاد محدود و دارای گشودگی دایره‌ای به‌دست آورند. نتایجی عددی برای محاسبهٔ تنش در ورق مستطیلی‌شکل با نسبت‌های مختلف شعاع گشودگی به ابعاد ورق ارائه شد. در این تحقیق، شرایط مرزی متفاوتی برای لبه‌های ورق و مرز گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. نیستانی و همکارانش [7] حلّی برای یک ورق نامحدود دارای گشودگی دایره‌ای و تحت شار حرارتی یکنواخت به‌دست آوردند. کاتیس و همکارانش [8] مسئلهٔ ترموالاستیک میان‌بارها یا گشودگی‌های واقع در یک زمینهٔ الاستیکِ نامحدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها مرزهای مسئله را با استفاده از نگاشت همنوای مشخصی به داخل دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل کردند. در مقاله‌ای توسط هاسبه و همکارانش [9] روابط مربوط به حل مسئلهٔ ترموالاستیک دوبعدی برای ورق حاوی گشودگی به‌صورت کامل تشریح شد. ورق از مادهٔ الاستیک خطی همگن و همسان‌گرد ساخته شده است و از قانون هوک تبعیت می‌کند. در این مقاله، آنها از روش متغیّر مختلط برای ارائهٔ روابط خود استفاده کردند. توابع پتانسیل مختلط برای توابع نگاشت مورد استفاده در

مقاله و هم‌چنین برای شرایط مرزی و دمایی مختلف استخراج شدند. حلّ عمومی برای مسائل با شرایط مرزی نیرویی، جابه‌جایی و ترکیبی تحت شار حرارتی یکنواخت و یا تحت یک منبع حرارتی نقطه‌ای به‌دست آمد.

بهولار [10] مدل دوبعدی مسئلهٔ ترموالاستیک در یک ناحیهٔ شش‌ضلعی با یک گشودگی بیضی‌شکل را مورد بررسی قرار داد. مرز خارجی تحت جریان حرارتی یکنواخت درنظر گرفته شد. در این تحقیق فرض شد که گشودگی بیضی‌شکل در مرکز ناحیه قرار گرفته و عایق است. آسری [11] از روش متغیّر مختلط برای به‌دست آوردن توابع پتانسیل و توابع گورست برای یک ورق الاستیک نامحدود دارای گشودگی‌هایی با اشکال مختلف استفاده کرد. به‌منظور دسترسی به حلّی صریح، این گشودگی‌ها با استفاده از تابع نگاشتی مناسب و همنوا به خارج دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته می‌شوند. بهولار و گز [12] و همکارش با فرض تنش صفحه‌ای تحلیل تنش حرارتی در یک ورق همسان‌گرد با یک گشودگی شبه‌بیضی را بررسی کردند. آنها از روش متغیّر مختلط و از شرایط همدمایی در مرز گشودگی استفاده کردند. تنش ماکزیمم در اطراف گشودگی‌های مختلف محاسبه شد. در مورد مواد ناهمسان‌گرد از تعمیم تئوری‌های ارائه‌شده توسط اشترو و لخنیتسکی برای تحلیل صفحات حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت جریان حرارتی یکنواخت استفاده شد. وو [13] تأثیر دما بر تغییرشکل صفحه‌ای در یک جسم الاستیک ناهمسان‌گرد را بررسی کرد. مسئلهٔ تنش‌های حرارتی در یک جسم ناهمسان‌گرد تحت جریان حرارتی یکنواخت که به‌وسیلهٔ یک گشودگی بیضی‌شکل یا ترک دچار آشفتگی می‌شد توسط هوو [14] مورد بررسی قرار گرفت. یوشیکاوا و هاسبه [15] توابع گرین مربوط به یک مسئلهٔ ترموالاستیسیتهٔ دوبعدی را برای یک ورق نامحدود با گشودگی دلخواه و با شرایط دمایی آدیاباتیک و ایزوترمال به‌دست آوردند. ورق ناهمسان‌گرد نامحدود حاوی گشودگی بیضی‌شکل تحت جریان حرارتی یکنواخت با استفاده از فرمول‌بندی لخنیتسکی و نگاشت همنوا در مقاله‌ای توسط چاو و گائو [16] حل شد. تحلیل تنش و میدان مغناطیسی برای یک ورق نازک نامحدود از جنس مواد فرومغناطیس نرم، پارامغناطیس و دیامغناطیس با یک گشودگی بیضی‌شکل تحت جریان الکتریکی پایدار توسط هاسبه [17] ارائه شد. به‌جز فرض تنش صفحه‌-ای که به‌دلیل نازک بودن ورق درنظر گرفته شد؛ در تحقیق آنها هیچ فرض دیگری برای تحلیل صورت نگرفت. هاسبه و همکارانش [18] با استفاده از روش متغیّر مختلط و تابع نگاشت کسری مناسب مسئلهٔ توزیع جریان الکتریکی، دما و تنش‌های حرارتی در یک ورق هادیِ نامحدود را تحلیل کردند. جریان الکتریکی یکنواخت در بی‌نهایت به یک ورق هادی نامحدود شامل یک گشودگی بیضی‌شکل که در مرز گشودگی دارای یک ترک لبه‌ای است؛ اعمال شد. جریان الکتریکی باعث ایجاد گرما و شار حرارتی و درنهایت تنش حرارتی در ورق شد. ضرایب شدت تنش نیز در این مقاله محاسبه شدند. وانگ و چائو [19] به‌کمک ترموالاستیسیتهٔ صفحه‌ای حلّی تحلیلی برای ورق حاوی میان‌باری که شکلی نزدیک به دایره دارد؛ ارائه کردند. در این تحقیق از روش متغیّر مختلط و تئوری اغتشاشات برای ارائهٔ نتایج استفاده شد. هاسبه و همکارانش [20] مسئلهٔ مقدار مرزی ترموالاستیک برای یک میان‌بار صلب در تقابل با یک ترک خطی را در یک ورق نامحدود تحت جریان حرارتی یکنواخت مطالعه کردند. در این مقاله سعی شد تا چرخش صلب میان‌بار نیز بررسی شود. مسئله با استفاده از روش متغیّر مختلط و با ارائه تابع نگاشتی کسری حل شد.

در مورد صفحات همسان‌گرد حاوی ترک می‌توان به تحقیقات زیر اشاره کرد.

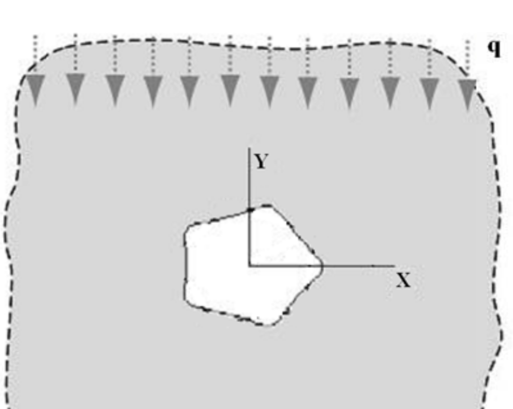
چن [21] مسألهٔ یک ترک به شکل کمانی از دایره در یک ورق نامحدود را تحت بارگذاری حرارتی به‌کمک تابع پتانسیل متغیّر مختلط و روش معادلهٔ انتگرالی حل کرد. وین و همکارانش [22] تقابل بین یک گشودگی ترک‌دار و یک ترک خطی تحت جریان حرارتی یکنواخت را بررسی کردند. نتایج آنها نشان داد که تقابل بین گشودگی ترک‌دار و ترک خطی تحت جریان حرارتی یکنواخت منتهی به حذف ضرایب شدّت تنش در نوک ترک لبه‌ای گشودگی می‌شود. این امر برای تقابل بین گشودگی ترک‌دار و ترک خطی تحت کشش یکنواخت در دوردست دیده نشد. گائو و همکارانش [23] حلّی دقیق برای تحلیل تنش ورق پیزوالکتریک دارای گشودگی بیضی‌شکل یا ترک ارائه کردند. ابتدا با تعمیم مسئلهٔ دوبعدی براساس نسخهٔ پیشرفتهٔ فرمول‌بندی اشترو- اشلبای، یک گشودگی بیضی‌شکل در یک جسم ترموپیزوالکتریک و تحت جریان حرارتی یکنواخت و بارهای الکتریکی-مکانیکی در بی‌نهایت مطالعه شد. سپس با میل دادن ابعاد گشودگی به سمت ترک حل‌هایی دقیق برای ضرایب شدّت میدان در نزدیکی نوک ترک و میدان الکتریکی درون ترک ارائه شد. لی و کاردوماتیس [24] با استفاده از فرمول‌بندی نابه‌جایی اشترو، پیشرفت ترک برای یک مادّهٔ ناهمسانگرد را تحت بارهای ترکیبی مکانیکی و حرارتی مورد بررسی قرار دادند. اخیراً نیز با استفاده از روش متغیّر مختلط و حل معادلات انتگرالی با استفاده از انتگرال کوشی و استفاده از توابع نگاشتی کسری گشودگی‌های مختلف واقع در صفحات نامحدود همسانگرد مطالعاتی انجام شده است [25].

اگرچه تحقیقات زیادی در زمینهٔ ورق‌های حاوی گشودگی و تحت جریان حرارتی یکنواخت انجام شده است؛ ولی بیشتر نتایج ارائه شده برای گشودگی‌هایی با شکل‌های خاص مانند دایره و بیضی است. به نظر مؤلفان این مقاله تحقیقی که به‌صورت کامل تأثیر شعاع انحنای گوشهٔ گشودگی‌های مختلف بر توزیع تنش را مورد مطالعه قرار دهد؛ وجود ندارد. با معرفی تابع نگاشتی مناسب در این تحقیق امکان بررسی گشودگی‌های مختلف و بررسی انحنای گوشهٔ گشودگی براحتی فراهم می‌شود. در این تحقیق سعی می‌شود تا به مطالعهٔ تأثیر این پارامتر بر روی توزیع تنش اطراف انواع گشودگی‌ها پرداخته شود.

خوّاص مکانیکی مادّهٔ به‌کار رفته و فرضیات

در این تحلیل از یک صفحل حاوی گشودگی مرکزی استفاده شده است. گشودگی چنان درنظر گرفته شده است که مسئله به شکل صفحهٔ نامحدود درآید (اندازهٔ گشودگی در مقابل ابعاد صفحه کوچک است).

ماده دارای رفتار الاستیک خطی است و باتوجه به شرایط مرزی (عدم وجود منبع حرارتی داخل گشودگی) تنها تنش ایجادشده در مرز گشودگی σ_θ است. صفحه تحت شار یکنواخت تک‌جهتی q مطابق شکل (۱) قرار گرفته است. جریان حرارتی یکنواخت که در بی‌نهایت اعمال می‌شود در اثر وجود گشودگیِ عایق، واقع در مرکز صفحه مغشوش می‌شود. این امر باعث ایجاد تنش در اطراف گشودگی می‌گردد. روش مورد استفاده روش متغیّر مختلط است.



شکل ۱ صفحهٔ بی‌نهایت تحت جریان یکنواخت q با گشودگی مرکزی پنج‌ضلعی

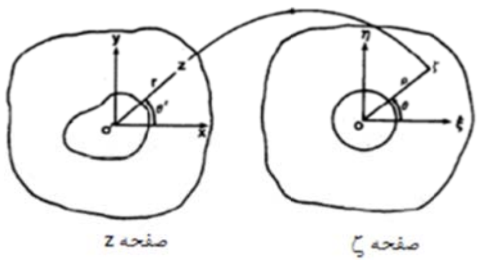
باتوجـه بـه ایـن‌کـه تمرکـز تـنش در صـفحات همسان‌گرد دارای گشودگی مستقل از جنس و خواص مکانیکی ماده می‌باشد، بنابراین نتـایج ایـن پـژوهش را می‌توان برای صفحات همسان‌گرد از سایر جنس‌ها نیـز استفاده کرد. نتایج ارائه شده در این تحقیق بـرای ورق فولادی است. خوّاص مکانیکی مادّهٔ به‌کار رفته در ایـن تحلیل برای فولاد مورد نظر، در جدول (۱) ارائه شـده است.

جدول ۱ خوّاص مکانیکی مادّهٔ به‌کار رفته

نوع مادّه	α_0 (μm/m°C)	K (W/m°C)	ν	E (GPa)
فولاد	۱۱/۱	۵۰/۲	۰/۳	۲۱۰

تابع نگاشت

همان‌طور که قبلاً بیـان شـد، فلـورنس و گـودیر [1,3] توزیـع تـنش را بـرای گشـودگی‌هـای دایـره‌ای و بیضی‌شکل از روش تحلیلی مورد بررسی قـرار دادنـد. به‌منظور بسط روابط ارائه‌شده توسط فلورنس و گودیر بـرای بـه‌دسـت آوردن توزیـع تـنش اطـراف سـایر گشودگی‌ها و هم‌چنین برای محاسبهٔ راحت‌تر انتگـرال کوشـی در هنگـام محاسـبهٔ تـنش، بهتـر اسـت مـرز گشودگی به دایره‌ای به شعاع واحد تبـدیل شـود. لـذا به‌وسیلهٔ نگاشت هم‌نوا تبدیل ناحیهٔ خارج گشودگی در مختصـات فیزیکـی z بـه محـدودهٔ خـارج گشـودگیِ دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه ζ با تـابع انتقـال زیـر صورت می‌گیرد (شکل ۲).



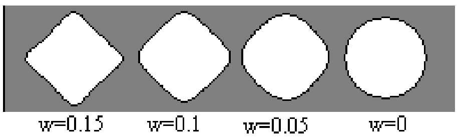
شکل ۲ نگاشت گشودگی

$$z = w(\zeta) = x + iy \qquad (۱)$$

که در رابطهٔ فوق x و y به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$x = \lambda\big(cos(\theta) + wcos(n\theta)\big)$$
$$y = -\lambda\big(csin(\theta) - wsin(n\theta)\big) \qquad (۲)$$

در رابطهٔ فوق، پارامترهای مختلفی از قبیل n، c، λ و w دیده می‌شود. این پارامترها نوع شـکل، بزرگـی و تیزی یا نرمی آن را نشان می‌دهند. n+1 تعـداد اضـلاع گشودگی را نشان می‌دهد. c میزان کشیدگیِ گشـودگی (نسبت طول به عرض گشودگی) را نشان مـی‌دهـد. λ بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد. پارامتر w برای تعیین میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی تعریف شده است. به عبارت دیگر w نشان‌دهندهٔ انحنای گوشه‌های گشودگی می‌باشد و مطـابق شـکل (۳) بـا کـاهش آن، گشودگی به دایـره (w=0,c=1) یـا بیضـی (w=0,c≠1) تبدیل می‌شود. در حقیقت شکل (۳) ترسیم معادلهٔ (۲) برای wهای مختلف و c=1 است.

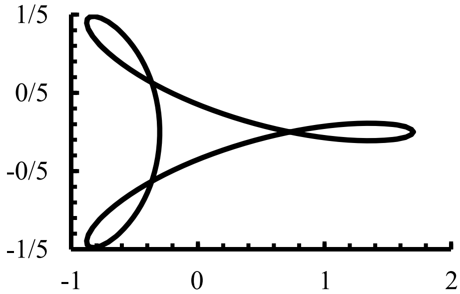


شکل ۳ تأثیر پارامتر w بر روی شکل گشودگی مربعی

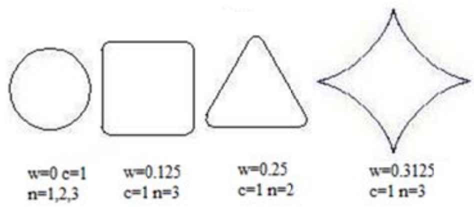
برای جلوگیری از ایجاد گشودگی با لبـه‌هـای تیـز بایـد w در بـازهٔ $0 \le w \le 1/n$ قـرار گیـرد. مطـابق رابطـهٔ مذکور حداکثر مقدار w برای مثلث با n=2 نباید بیشـتر از 0.5 باشد اما همانند شکل (٤) اگر مقدار w خارج از محدودهٔ فوق درنظر گرفته شـود اضـلاع گشـودگی در نقاطی یکدیگر را قطع خواهند کـرد. تـأثیر پارامترهـای مختلف در ایجـاد گشـودگی در شـکل (۵) نشـان داده شده است.

انحنـای گوشـه‌هـای گشـودگی (w) یکـی از پارامترهای مهم و تأثیرگـذار بـر توزیـع تـنش اطـراف گشودگی است که در این مقاله تأثیر این پارامتر بررسی می‌شـود. معـادلات اساسـی مسـئلهٔ ترموالاستیسـیته در حالت صفحه‌ای مؤلفه‌های تنش با استفاده از تابع تنش ایری F(x,y) به‌صورت زیر قابل ارائه است:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial_x \partial_y} \quad (۳)$$



شکل ٤ شکل مثلث با w=0.7



شکل ۵ تأثیر پارامترهای مختلف در ایجاد گشودگی

معادلهٔ سازگاری در حالت دوبعدی برحسب تـابع تنش F به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (٤)$$

موشخلشیولی [2] با استفاده از روش متغیّر مختلط حلّ زیر را برای معادلهٔ فوق پیشنهاد کرد:

$$F(x,y) = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (۵)$$

که در آن z=x+iy متغیّر مختلط و $\bar{z} = x - iy$ مـزدوج آن است. $\chi(z)$ و $\varphi(z)$ توابع پتانسیل تحلیلی هستند که باتوّجه به شرایط مرزی و دمایی و پیوستگی جابه‌جایی قابل محاسبه مـی‌باشـند. بـا توّجـه بـه روابـط فـوق، مؤلفه‌هـای تـنش برحسـب توابـع پتانسـیل بـا فـرض $\chi'(z) \equiv \psi(z)$ به‌صورت زیر قابل ارائه هستند [2].

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ &= 4\mathrm{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \quad (٦)$$

تابع پتانسیل دمایی مختلط $\Omega(z)$ بـرای یـک مـادّهٔ همسان‌گـرد دوبعـدی تـابعی هولومورفیـک اسـت کـه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega(z) = T(x,y) + i\Theta(x,y) \quad (۷)$$

با درنظر گـرفتن معادلـهٔ هـدایت حرارتـی حالـت پایـدار، تـابع دمـایی T(x,y) در حالـت دوبعـدی بایـد معادلهٔ زیر را برآورده کند.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (۸)$$

چـون T(x,y) قسـمت حقیقـی $\Omega(z)$ اسـت پـس می‌توان رابطهٔ زیر را نوشت:

$$T(x,y) = \frac{1}{2}[\Omega_0(z) + \overline{\Omega_0(z)}] \quad (۹)$$

مؤلفه‌های شار حرارتـی q_x و q_y در جهـات x و y به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$q_x - iq_y = -k\Omega_0{}'(z) \quad (۱۰)$$

در یک مسئلهٔ ترموالاستیسیتهٔ دوبعدی، تابع دمایی T(x,y) باعث ایجاد میدان جابه‌جایی حرارتی می‌شود. میدان جابه‌جایی حرارتی با استفاده از معادلهٔ زیر قابل محاسبه است [3].

$$u + iv = \frac{1}{2}G\left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\right] + \alpha' \int \Omega_0(z)dz \qquad (۱۱)$$

که در آن $G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$ نشان‌دهندهٔ مدول برشی ماده است. α' و κ ضرایبی هستند که بسته به نوع فرض تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر تعیین می‌شوند. ν نسبت پواسون و α_0 ضریب انبساط حرارتی ورق است.

تنش صفحه‌ای	$\alpha' = \alpha_0$	$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$
کرنش صفحه‌ای	$\alpha' = (1+\nu)\alpha_0$	$\kappa = 3 - 4\nu$

معادلات اساسی در صفحهٔ نگاشت

برای محاسبهٔ ساده‌تر معادلات انتگرالی از روش کوشی، در این قسمت سعی می‌شود تا با استفاده از تابع نگاشت معرفی‌شده $z = w(\zeta)$ کلیهٔ معادلات و شرایط مرزی در صفحهٔ نگاشت ارائه شود. مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی برحسب توابع پتانسیل در صفحهٔ نگاشت به‌صورت زیر قابل محاسبه است [3].

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\left\{\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}' + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] \qquad (۱۲)$$

$$u + iv = \frac{1}{2}G\left[\kappa\phi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\phi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}\right] + \alpha'\int \Omega(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta$$

باتوّجه به رابطهٔ فوق، برای تعیین توابع پتانسیل نیاز به تعیین تابع دمایی $\Omega(\zeta)$ است. با فرض عایق بودن مرز گشودگی و با استفاده از رابطهٔ (۱۰) تابع $\Omega(\zeta)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\Omega(\zeta) = -\frac{q\lambda}{2\kappa}\left[e^{-i\delta}(b\zeta + 2w\zeta^2) + e^{i\delta}\left(\frac{b}{\zeta} + \frac{2w}{\zeta^2}\right)\right] \qquad (۱۳)$$

که در آن، b=c+1. با در نظر گرفتن نقاط مرزی $\zeta = \sigma$، شرایط مرزی مربوط به تنش و جابه‌جایی برحسب توابع پتانسیل به‌ترتیب به‌صورت زیر بیان می‌شود [3]:

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 0$$

$$\kappa\phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2G\alpha'\int \Omega(\sigma)\omega'(\sigma)d\zeta \qquad (۱۵)$$

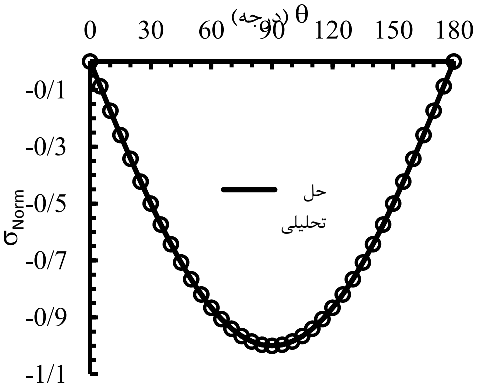
آنچه که برای اولین بار در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته است بررسی شعاع انحنای گوشه‌های انواع گشودگی‌های مختلف است.

بررسی درستی جواب‌ها

همان‌طور که اشاره شد با انتخاب w=0 و c=1 گشودگی به دایره تبدیل می‌شود، حال آن‌که با انتخاب w=0 و c مخالف یک گشودگی به بیضی تبدیل خواهد شد.

برای تأیید درستی نتایج، مقایسه‌ای بین حلّ تحلیلی حاضر (با انتخاب w و c مناسب) و نتایج ارائه‌شده در [1, 3] که توسط فلورنس و گودیر ارائه شدند؛ صورت گرفته است. فلورنس و گودیر تنش‌های حرارتی موضعی را در یک صفحهٔ بی‌نهایت تحت شار حرارتی یکنواخت در اطراف گشودگی دایره‌ای بررسی

کردند [1]. مقایسهٔ حلّ تحلیلی حاضر و تحقیقات فلورنس و گودیر در شکل (٦) آمده است. در واقع این شکل توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را در اطراف گشودگی نشان می‌دهد.



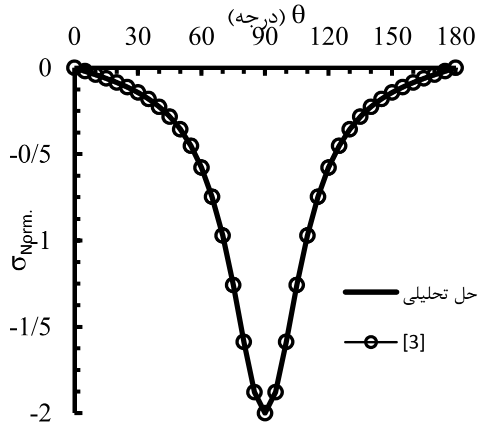
شکل ٦ مقایسهٔ روش تحلیلی حاضر و [1] برای گشودگی دایره‌ای

منظور از تنش بی‌بعد در این تحقیق $\sigma_{Norm.} = \frac{\sigma_\theta}{E\alpha q\lambda/k}$ است. که در آن E مدول یانگ، α ضریب انبساط حرارتی، q شار حرارتی، k ضریب هدایت حرارتی و λ نشان‌دهندهٔ اندازهٔ گشودگی است.

نتایج حاصل از حلّ تحلیلی حاضر و نتایج به‌دست آمده از [1] به‌طور کامل بر یکدیگر منطبق هستند. لازم به توضیح است که این نتایج با انتخاب w=0 و c=1 که معادل گشودگی دایره‌ای می‌باشد، به‌دست آمده است.

فلورنس و گودیر [3] تنش‌های حرارتی موضعی را در یک ورق نامحدود تحت شار حرارتی یکنواخت، حول یک گشودگی بیضی‌شکل بررسی کردند. مقایسهٔ حلّ تحلیلی حاضر و این تحقیقات در شکل (۷) آمده است.

لازم به توضیح است که فلورنس و گودیر در مقالهٔ خود تأثیرات کشیدگی را با m نشان داده‌اند؛ حال آنکه در این مقاله c نشان‌دهندهٔ مقدار کشیدگی گشودگی می‌باشد. در شکل (۷) نتایج برای حالت c=3 باهم مقایسه شده است. نتایج حلّ تحلیلی حاضر و [3] به‌طور کامل منطبق بر یکدیگر هستند. تحقیقات فلورنس و گودیر تنها برای گشودگی‌هایی به شکل دایره و بیضی صورت گرفته و تأثیر پارامتر w در آن لحاظ نشده است؛ حال آن‌که در این مقاله شعاع انحنای گوشهٔ گشودگی (w) برای انواع گشودگی‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

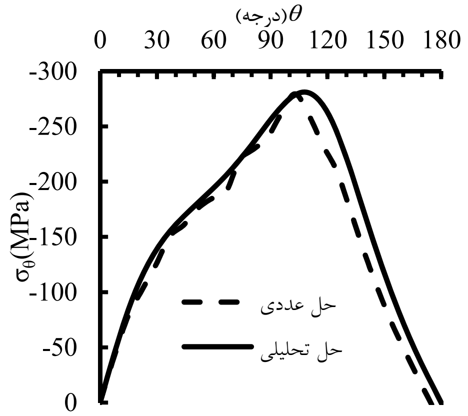


شکل ۷ مقایسهٔ روش تحلیلی حاضر و [3] برای گشودگی بیضی‌شکل

در شکل (۸) مقایسهٔ حلّ تحلیلی حاضر و حلّ عددی به‌وسیلهٔ نرم‌افزار آباکوس (Abaqus) برای گشودگی مثلثی آمده است. نتایج تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند.

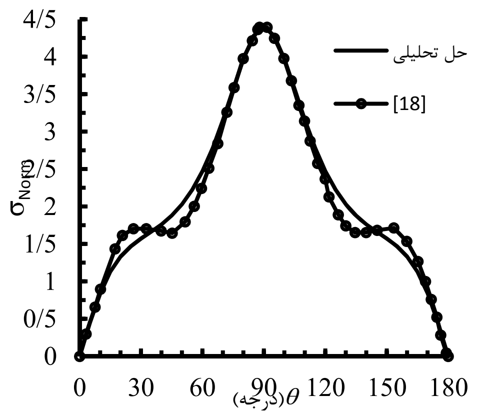
مقایسهٔ دیگری بین حلّ تحلیلی حاضر (با انتخاب w و λ مناسب) و نتایج ارائه‌شده در مرجع [19]، صورت گرفته است. وانگ [18] از روش پرتوبیشن (Perturbation) تنش‌های حرارتی موضعی را در یک ورق بی‌نهایت تحت شار حرارتی یکنواخت با زاویهٔ ۹۰ درجه، در اطراف گشودگی‌هایی که شکل آنها به دایره نزدیک است؛ مورد بررسی قرار داد. نتیجهٔ این مقایسه در شکل (۹) نشان داده شده است. مطابق این

شکل؛ نتایج حاصل از دو روش برای گشودگی مربعی با w=0.05 و λ = 3.4 با دقّت خوبی برهم منطبقند.



شکل ۸ مقایسهٔ روش تحلیلی حاضر و حل عددی برای گشودگی مثلثی

نتایج مراجع مختلف با نتایج حاصل از این مقاله تطابق قابل قبولی با همدیگر دارند که تأکیدی بر درستی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی حاضر است.



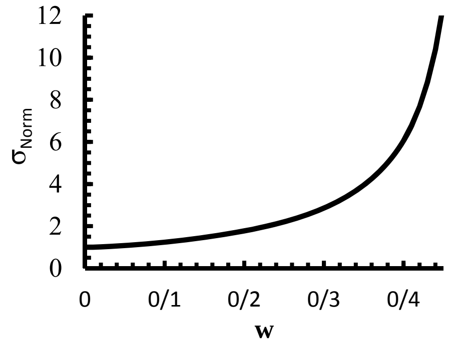
شکل ۹ مقایسهٔ روش حلّ تحلیلی حاضر و مرجع [19] برای گشودگی مربعی

نتایج

تأثیر نرمی گشودگی بر توزیع تنش بسته به نوع گشودگی متفاوت خواهد بود. لازم به توضیح است که در مورد مواد همسان‌گرد رفتار به نوع ماده بستگی ندارد و فقط به هندسهٔ گشودگی بستگی دارد. با عنایت به این موضوع تأثیر نرمی گشودگی در گشودگی‌های مختلف به‌صورت جداگانه بررسی می‌شود.

گشودگی مثلثی

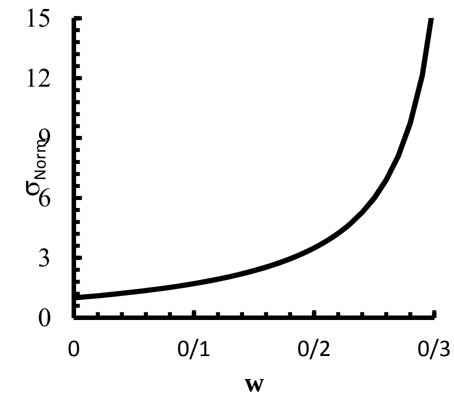
همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد اثر نرمی گشودگی با پارامتر w در معادلهٔ (۲) مشخص می‌شود. مطابق آن‌چه در شکل (۳) نشان داده شده است، با کمتر شدن w گشودگی ملایم‌تر می‌شود و در w=0 گشودگی، به دایره تبدیل می‌شود. البته این شکل برای گشودگی شبه‌مربعی است ولی برای سایر گشودگی‌ها اثر w به‌همین صورت است. با تغییر انحنای گشودگی(w)، در هر w خاص یک تنش بی‌بعد ماکزیمم به‌دست می‌آید، پس اگر انحنای گشودگی از صفر تا 1/n تغییر کند به‌ازای هر انحنای گشودگی یک تنش بی‌بعد ماکزیمم در اطراف گشودگی وجود دارد. از بین این تنش‌های بی‌بعد ماکزیمم، کمترین و بیشترین مقدار به‌ترتیب تنش مطلوب و تنش نامطلوب نامیده شده است. در طراحی‌ها باید از تنش نامطلوب اجتناب کرد و به شرایط تنش مطلوب نزدیک شد. شعاع انحنایی(w) که تنش مطلوب در آن اتفاق می‌افتد، w بهینه نام دارد. در مورد گشودگی مثلثی همان‌طور که در شکل (۱۰) دیده می‌شود، با کمتر شدن w یا ملایم‌تر شدن گشودگی تنش کاهش می‌یابد، طوری که کمترین مقدار تنش (تنش مطلوب) در کمترین w(w=0) که معادل گشودگی دایره‌ای است رخ می دهد. این امر نشان‌دهندهٔ آن است که انحنای گشودگی، پارامتر مهمی در کاهش شدت تنش در اطراف گشودگی است و همواره تنش بی‌بعد در گشودگی دایره‌ای کمتر از تنش بی‌بعد در صفحهٔ نامحدود حاوی گشودگی مثلثی است.



شکل ۱۰ تأثیر معیار تیزی روی تنش در گشودگی مثلثی

گشودگی مربعی

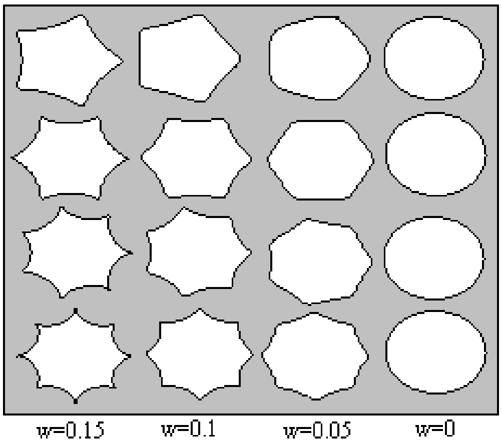
برای گشودگی مربعی همان‌طور که در شکل (۱۱) نشان داده شده است، رفتاری مشابه با گشودگی مثلثی دیده می‌شود.



شکل ۱۱ تأثیر معیار تیزی روی تنش در گشودگی مربعی

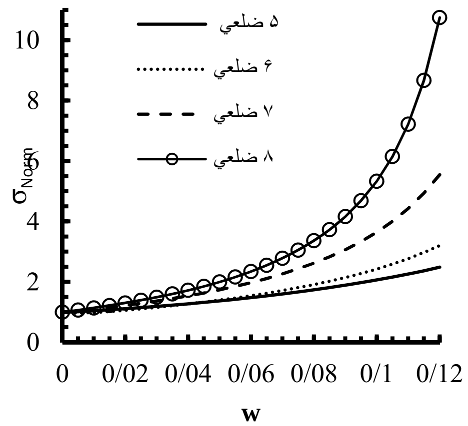
گشودگی‌های n ضلعی

در گشودگی مربعی نیز تنش با کمتر شدن w یا ملایم‌تر شدن گشودگی کاهش می‌یابد، طوری که کمترین مقدار تنش در w بهینه صفر و گشودگی دایره‌ای رخ می‌دهد. با عبور از مقدار مشخصی برای w افزایش تنش بی‌بعد با شدت بیشتری رخ می‌دهد. این رفتار برای گشودگی مثلثی نیز مشهود است. برای این‌گونه گشودگی‌ها نیز مطابق با روندی که در ارائهٔ نتایج گشودگی‌های مثلثی و مربعی به‌کار برده شد، نتایج آورده می‌شود. ابتدا در شکل (۱۲) تأثیر w بر روی شکل ظاهری گشودگی‌های مختلف نشان داده شده است.



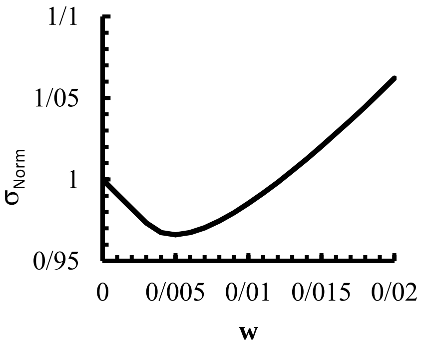
شکل ۱۲ تأثیر پارامتر w بر روی شکل گشودگی‌های n ضلعی

در شکل (۱۳) تأثیر w بر روی تنش ارائه شده است. برای گشودگی‌های ۵، ۷ و ۸ ضلعی مطابق شکل (۱۳) با کمتر شدن w تنش کاهش می‌یابد، طوری که تنش مطلوب در کمترین w(w=0) اتفاق می‌افتد. با افزایش تعداد اضلاع گشودگی شیب تغییرات تنش بی‌بعد با w نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۱۳ تأثیر معیار تیزی روی تنش بی‌بعد در گشودگی‌های n ضلعی

برای گشودگی شش‌ضلعی همان‌طور که در شکل (۱٤) نشان داده شده است، رفتار متفاوتی نسبت به سایر گشودگی‌ها دیده می‌شود. در این نوع گشودگی با نرم‌تر شدن گشودگی یا کاهش w تا مقدار مشخصی تنش کاهش، سپس با کاهش مجدد w و میل کردن آن به سمت صفر، مقدار تنش افزایش می‌یابد. در این حالت گشودگی دایره‌ای بهترین شکل گشودگی نمی‌باشد. بنابراین با افزایش w و انتخاب شعاع انحنای مناسب می‌توان به تنش مطلوبی حتی کمتر از گشودگی دایره‌ای رسید. برای گشودگی شش‌ضلعی تنش تا w=0.012 کمتر از تنش ناشی از گشودگی دایره‌ای(w=0) است؛ کمترین تنش در w=0.005 اتفاق می‌افتد. مقدار کمترین تنش بی‌بعد در w=0.005 برابر ۰/۹٦٦ می‌باشد. لازم به یادآوری است که در حالت w=0 یا گشودگی دایره‌ای مقدار تنش بی‌بعد ۱ می‌باشد. با بیشتر شدن w از مقدار ۰/۰۱۲ مقدار تنش افزایش می‌یابد. پس این‌گونه نیست که همیشه گشودگی دایره‌ای بهترین گشودگی باشد. گشودگی‌های خاصی وجود دارد که تحت آنها می‌توان به تنش کمتری نسبت به گشودگی دایره‌ای رسید.



شکل ١٤ تأثیر معیار تیزی روی تنش در گشودگی شش‌ضلعی

نتیجه‌گیری

در این مقاله تأثیر نرمی و تیزی گشودگی‌های مختلف در صفحات تحت شار حرارتی یکنواخت با استفاده از روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. در حالت کلی می‌توان از این تحقیق چنین نتیجه گرفت که اولاً نوع گشودگی و نرمی یا تیزی گشودگی در مقدار تنش بی‌بعد ماکزیمم تأثیر بسزایی دارد و در گشودگی‌ها با شکل‌های متفاوت این ماکزیمم در نقاط متفاوتی رخ می‌دهد. ثانیاً با نرمتر شدن شعاع انحنا برای برخی از گشودگی‌ها، تنش بی‌بعد ماکزیمم کاهش می‌یابد. ثالثاً برای بعضی از گشودگی‌ها مانند شش‌ضلعی، با در نظر گرفتن w بهینه می‌توان به تنش بی‌بعد ماکزیمم کمتری از گشودگی دایره‌ای دست یافت.

مراجع

1 Florence, A.L. and Goodier, J.N., "Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 26, pp. 293-294, (1995).

2 Muskhelishvili, N.I., "*Some basic problems of mathematical theory of elasticity*", 4th edition, Noordhoff, Netherlands, pp.361-366, (1963).

3 Florence, A.L. and Goodier, J.N., "Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, pp. 635-639, (1960).

4 BapuRao, M.N., "Thermal stresses around an elliptic hole in an infinite thick plate subjected to a uniform heat flow", *Nuclear Engineering and Design,* Vol. 35, pp. 299-307, (1975).

5 Lee, C.W., "Thermal stresses in a thick plate", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 6, pp. 605-615, (1970).

6 Takeuti, Y. and Sumi, N., "Thermal stresses in rectangular plate with a circular hole based on an improve complex variable approach", *Mechanics Research Communication*, Vol. 3, pp. 133-138, (1976).

7 Nisitani, H., Saimoto, A., Noguchi, H. and Chert, D.H., "Method of analysis of two-dimensional stationary thermo-elastic problem by a body force method-1st Report, The Basic Theory", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 57, No. 542, pp. 2561-2567, (1991).

8 Kattis, M.A., "Thermoelastic plane problems with curvilinear boundaries", *Acta Mechanica*, Vol. 87, pp. 93-103, (1991).

9 Hasebe, N., Tamai, K. and Nakamura, T., "Analysis of a kinked crack under uniform heat flow", *Journal of engineering mechanics (ASCE Transaction)*, Vol. 112, pp. 31–42, (1986).

10 Bhullar, S.K., "Thermal stresses in a hexagonal region with an elliptic hole", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 6, pp. 245–256, (2006).

11 Aseeri, S.A.,"Goursat functions for a problem of an isotropic plate with a curvilinear hole", *International Journal of Open Problems in Computer Science*, Vol. 1, No. 3, pp. 266-285, (2008).

12 Bhullar, S.K. and Wegner, J.L., "Thermal stresses in a plate with hyper-elliptical hole", *Journal of Engineering and Technology Research*, Vol. 8, pp. 152-170, (2009).

13 Wu, C.H., "Plane anisotropic thermoelasticity", *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 51, pp. 724-726, (1984).

14 Hwu, C., "Thermal stresses in an anisotropic plate disturbed by an insulated elliptic hole or crack", *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 57, pp. 916-922, (1990).

15 Yoshikawa, K. and Hasebe, N. ,"Green's function of the displacement boundary value problem for a heat source in an infinite plane with an arbitrary shaped rigid inclusion", *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 69, pp. 227- 239, (1999).

16 Chao, C.K. and Gao, B., "Mixed boundary-value problems of two-dimensional anisotropic thermoelasticity with elliptic boundaries", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 5975-5994, (2001).

17 Hasebe, N., "Magneto-elastic stress induced by an electric current in an infinite thin plate with an elliptical hole", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, pp. 1353-1370, (2010).

18 Hasebe, N., Bucher ,C.H. and Heuer, R.,"Heat conduction and thermal stress induced by an electric current in an infinite thin plate containing an elliptical hole with an edge crack", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 138–147, (2010).

19 Wang, C.H. and Chao, C.K., "On perturbation solutions for nearly circular inclusion problems in plane thermoelasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 36-44, (2002).

20 Hasebe, N., Wang, X.F., Saito, T. and Sheng, W., "Interaction between a rigid inclusion and a line crack under uniform heat flux", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 2426–2441, (2007).

21 Chen, Y.Z., "General solution for arc crack problem in thermoelastic medium", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 40, pp. 2223–2234, (2002).

22 Vinh, P.C., Hasebe, N., Wang, X.F. and Saito, T., "Interaction between a cracked hole and a line crack under uniform heat flux", *International Journal of Fracture*, Vol. 131, pp.367–384, (2005)

23 Gao, C.F., Zhao, Y.T. and Wang, M.-Zh., "An exact and explicit treatment of an elliptic hole problem in thermopiezoelectric media", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 39, pp. 2665–2685, (2002).

24 Li, R. and Kardomateas, G. A., "Thermo-elastic crack branching in general anisotropic media", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 42, pp. 1091–1109, (2005).

25 Seddeek M. A., Abdou M. A. , El-Sayed W. G. and El-Saedy F. M., "Complex Potential Functions and Integro-Differential Equation in Elastic Media Problem in Presence of Heat", *American Journal of Fluid Dynamics*, Vol. 2, pp. 31-41, (2012).